

Wokół Pitagorasa

Wszyscy słyszeliśmy o twierdzeniu Pitagorasa, większość z nas potrafi je zastosować. Ale czy jego autorem był rzeczywiście Pitagoras?

Okazuje się, że niewiele wiemy o tym słynnym uczonym. Dlaczego? Ponieważ nie zostawił on po sobie żadnych pism, a o jego dokonaniach dowiadujemy się z dzieł filozofów greckich, którzy żyli ponad 200 lat później (byli to m.in. Diogenes, Jamblichos, Porfinios). Nie można też ustalić dokładnych dat jego urodzin i śmierci.

Co zatem wiemy?

1. Pitagoras urodził się ok 572 r. p. n. e. w rodzinie kupieckiej na greckiej wyspie Samos. Wiele podróżował do Indii, Egiptu, Syrii i Mezopotamii. Spędził kilka lat w towarzystwie Talesa w pobliskiej Jonii. Był filozofem, etykiem, politykiem i matematykiem. Ok 530 r. p. n. e (czyli w wieku ok 40 lat) osiadł na stałe w Krotonie (Italia). Założył tam szkołę zwaną Związkiem Pitagorejskim, która dała podwaliny kierunkowi filozoficzno-religijnemu – pitagoreizmowi. Po spaleniu się szkoły Pitagoras zamieszkał w Metaponcie, gdzie przebywał do końca życia.



PYTHAGORAS

Pitagoras, źródło: wikimedia.com

2. Pitagoreizm.

Elementami pitagoreizmu są: muzyka, harmonia i liczba, rozpatrywane przede wszystkim jako czynniki wychowawcze, służące zbliżeniu do Boga. Szkoła ta głosiła też wiarę w nieśmiertelność duszy, która musi wielokrotnie wcielać się w postaci ludzi a także zwierząt, aby odpokutować za swoje pierwotne przewinienie.

W okresie początkowego rozkwitu, pitagorejczycy zajmowali się głównie arytmetyką. Hasło tego okresu brzmiało: „Wszystko jest liczbą”. Trzeba tu wspomnieć, że rozumieli liczbę nie jako abstrakcję, lecz jako realny kształt. Poza tym mówiąc o liczbach mieli na myśli liczby naturalne. Dużym szokiem dla nich było odkrycie odcinków niewspółmiernych (czyli takich, których nie da się zmierzyć tą samą jednostką – nie da się jej odłożyć całkowitą liczbę razy w każdym z nich). W konsekwencji odkryto liczby niewymierne, które wówczas nazwano alogoj (niewyraźalne).

Wydarzenie to podzieliło pitagorejczyków na dwa nurty:

- akuzmatyków (tzn. słuchaczy), którzy porzucili dociekania matematyczne i obrali drogę religijno-etyczną, uznali, że człowiek nie jest w stanie zgłębić tajemnicy harmonii i trzeba tylko słuchać podszeptów niebios na jej temat;
- matematyków (tzn. badaczy), którzy nie porzucając religii prowadzili dalsze badania i zajęli się przede wszystkim geometrią.

Przykłady głównych osiągnięć pitagorejczyków:

- pierwsza klasyfikacja liczb (liczby parzyste, pierwsze, będące kwadratami, doskonałe itd.)
- dowód twierdzenia Pitagorasa
- dowód, że suma kątów w trójkącie jest równa 180°
- wprowadzenie średniej arytmetycznej
- konstrukcja wielościanów foremnych i odkrycie dwunastościanu foremnego
- interwały w muzyce
- po raz pierwszy wysunęli tezę o kulistości Ziemi, wynikającą z obserwacji wcześniejszego pojawiania się gwiazd na niebie na wschodzie. Z osiągnięć tych korzystali M. Kopernik i J. Kepler.

Uczniowie Pitagorasa wiele swoich dokonań przypisywali swojemu mistrzowi, aby go uczcić, a także by poprzeć autorytetem wielkiego uczonego swoje poglądy. Dlatego dzisiaj trudno z całą pewnością stwierdzić, czego dokonał Pitagoras, a czego jego uczniowie.

3. Twierdzenie Pitagorasa

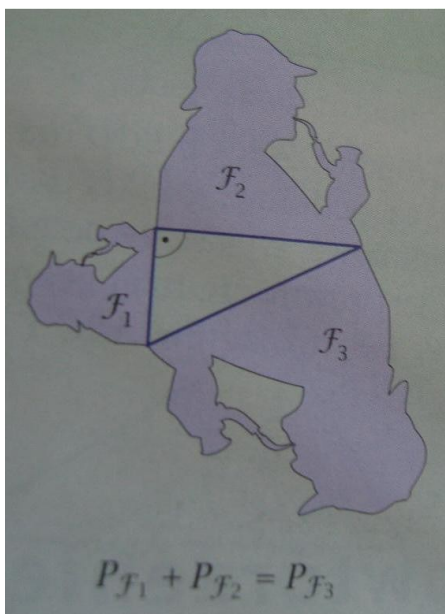
„Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to suma pól kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej”.

Jak dwa kwadraty zamienić na jeden o polu równym sumie pól kwadratów wyjściowych? Czyli jak pociąć dwa kwadraty, żeby wszystkie uzyskane części złożyć w trzeci?

Zastanówcie się, spróbujcie. Możliwości jest wiele. Jedną z nich znajdziecie na końcu tego artykułu.

Problemem tym zajmowano się ok 1000 – 1500 lat przed Pitagorasem. Jednak dopiero Pitagoras (lub jego uczeń) rozwiązał to zadanie po raz pierwszy, a tym samym udowodnił twierdzenie Pitagorasa. Dziś znamy wiele dowodów tego twierdzenia, wykorzystujących wiedzę z różnych dziedzin matematyki. Dwa z nich znajdziecie w podręczniku dla klasy pierwszej a kolejny w Centrum Hewelianum w Gdańsku. Popatrzcie, poszukajcie innych dowodów.

Prawdziwe też jest twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.



Kto sformułował twierdzenie Pitagorasa? Czy na pewno Pitagoras?

Do końca tego nie wiadomo, ale są dowody, że znano je dużo wcześniej w Egipcie, Babilonii, Chinach i Indiach.

Twierdzenie to można uogólnić, zastępując kwadraty odpowiednimi figurami podobnymi:

„Jeżeli na bokach trójkąta prostokątnego zbudujemy 3 figury podobne, to suma pól figur zbudowanych na przyprostokątnych jest równa polu figury zbudowanej na przeciwprostokątnej”.

4. Trójkąty pitagorejskie

Trójkąt pitagorejski to taki trójkąt, którego boki są wyrażone liczbami naturalnymi a , b , c spełniającymi warunek: $a^2 + b^2 = c^2$. Jest to, oczywiście trójkąt prostokątny (na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa).

Szczególnym takim trójkątem i jedynym, w którym dodatkowo długości boków są **kolejnymi** liczbami naturalnymi jest **trójkąt egipski**. Jakiej długości są jego boki? Oczywiście: 3, 4 i 5. Już Egipcjanie wiedzieli, że jest to trójkąt prostokątny i stosowali go do wyznaczania kątów prostych przy odnawianiu granic gruntowych zmywanych przez doroczne wylewy Nilu. Używali też łańcucha złożonego z 12 ogniów, z którego po napięciu układano trójkąt o bokach 3, 4, 5 i w ten sposób uzyskiwano kąt prosty, często wykorzystywany w budownictwie. Potraficie podać inne przykłady trójkątów pitagorejskich?

Pitagoras znalazł wzory pozwalające odnaleźć niektóre z nich :

$a = 2n + 1$, $b = 2n(n + 1)$, $c = 2n^2 + 2n + 1$, gdzie n oznacza liczbę naturalną.

Np. dla $n = 3$ otrzymamy: $a = 7$, $b = 24$, $c = 18 + 6 + 1 = 25$. Sprawdźmy, czy liczby te spełniają warunek Pitagorasa: $a^2 + b^2 = 7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2 = c^2$. Zatem liczby 7, 24, 25 są długościami boków trójkąta pitagorejskiego.

Dziś znamy jeszcze inne wzory pozwalające odnaleźć wszystkie trójkąty pitagorejskie, np.:

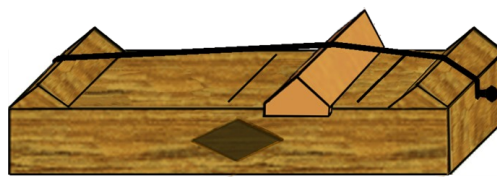
$a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$, gdzie m i n są dowolnymi liczbami naturalnymi takimi, że $m > n$.

5. Pitagoras i muzyka.

Pitagorejczycy wiedzieli, że człowiek odbiera jako harmonijne (przyjemne) zestawienie dźwięków, których częstotliwości pozostają ze sobą w stosunku będącym ilorazem niewielkich liczb naturalnych: 1, 2, 3, 4. Swoje badania prowadzili przy pomocy jednostrunowego instrumentu zwanego monochordem. Wykorzystując przesuwany mostek skracano odpowiednio jego strunę. Zauważyli, że jeżeli długości dwóch napiętych jednakową siłą strun mają się jak 2:1, to struny te

dają przyjemne współbrzmienie. Podobnie przyjemnie brzmią stosunki 3:2 i 4:3. W ten sposób otrzymano interwały (czyli odległości między strunami): **oktawę**, **kwintę czystą** i **kwartę czystą**.

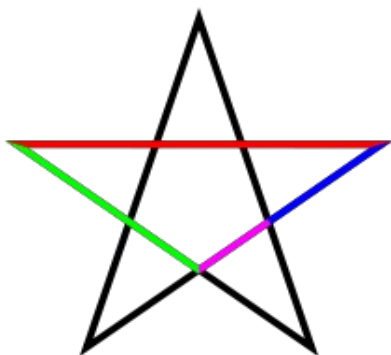
Dzieje się tak dlatego, że nałożenie na siebie fal spełniających powyższą własność daje w rezultacie regularny (okresowy) wynik, który w muzyce nazywany jest **konsonansem**. Nałożenie na siebie fal o niepasujących częstotliwościach daje nieregularny wynik czyli **dysonans**.



Monochord, źródło: wikimedia commons

Zauważmy jeszcze, że suma liczb 1,2,3,4 daje 10, a liczba ta według wierzeń pitagorejskich oznaczała doskonałość Wszechświata.

6. Gwiazda pitagorejska



Pentagram, źródło: wikipedia.org

Symbolem pitagorejczyków był pentagram, czyli pięciokąt gwiazdzisty. Znakiem tym pitagorejczycy pozdrawiali się i wzajemnie rozpoznawali, kreśląc go na piasku.

Figurę wyróżniają spośród innych gwiazd pewne właściwości, np. :

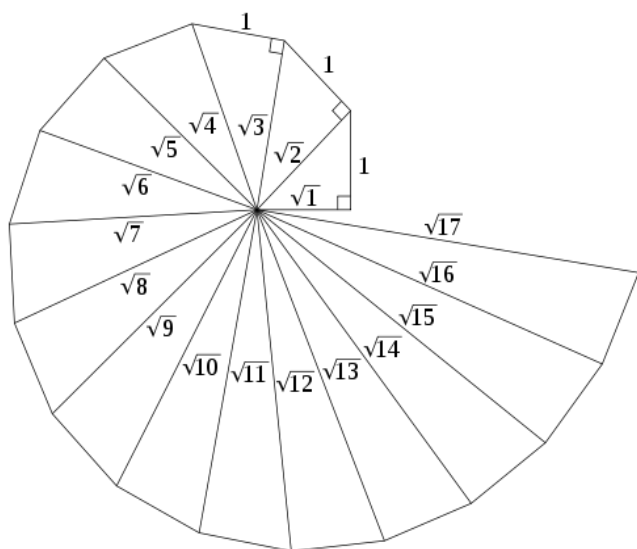
- suma kątów wewnętrznych równa jest 180° ,
- jest w nim ukryta **złota proporcja** (jest to podział odcinka na dwie takie części, że stosunek długości dłuższej części do długości krótszej jest taki sam jak stosunek długości całego odcinka do dłuższej jego części).

Takie złote cięcia można znaleźć we wszystkich punktach skrzyżowania promieni gwiazdy pitagorejskiej.

Korzystając z rysunku obok : stosunek długości odcinka **niebieskiego** do **różowego** jest taki sam, jak stosunek długości odcinka **zielonego** do **niebieskiego** oraz jest taki sam, jak stosunek długości odcinka **czerwonego** do **zielonego**. Ciekawostką jest, że do dziś 1/3 państw ma pentagram w swoim godle.

7. Ślimak Pitagorasa (zwany również ślimakiem Teodorosa)

Jak na osi liczbowej dokładnie zaznaczyć liczbę $\sqrt{3}$?



ślimak Pitagorasa, źródło: wikimedia commons

Jeśli chcemy znaleźć odcinek o długości, która jest pierwiastkiem z liczby naturalnej, możemy skorzystać ze ślimaka Pitagorasa. Nazwa pochodzi stąd, że opieramy się na twierdzeniu Pitagorasa.

1. Rysujemy trójkąt prostokątny równoramienny o przyprostokątnych długości 1.

Przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{2}$.

2. Do poprzedniego trójkąta dobudowujemy drugi, którego jedną przyprostokątną będzie odcinek o długości $\sqrt{2}$, a drugą o długości 1.

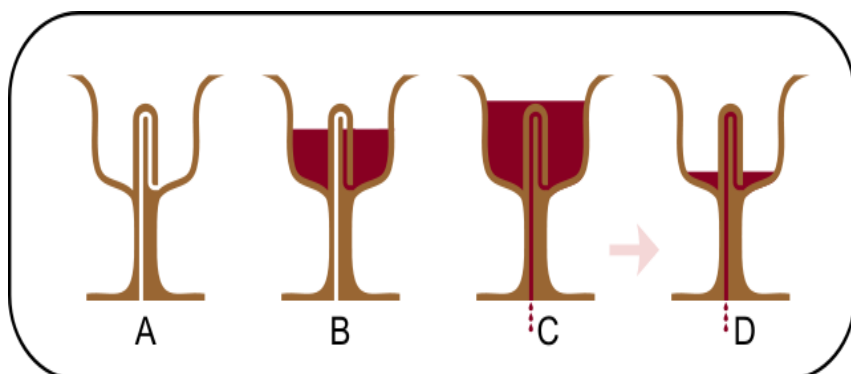
Przeciwprostokątna ma długość $\sqrt{3}$

Postępujemy tak dalej, aż uzyskamy interesujący nas odcinek.

Oczywiście sposób ten będzie dla nas użyteczny, jeśli będziemy szukać niezbyt długich odcinków.

8. Kubek Pitagorasa

Na koniec ciekawostka, nie do końca matematyczna. Mówię tu o kubku Pitagorasa. Nie jest to zwykły kubek. Jeżeli nalejemy do niego napoju do określonego poziomu, to napijemy się, jak z każdego innego kubka. Ale, jeśli ktoś naleje z rozmachem więcej, to niestety wyleje się z niego cała zawartość. Myślę, że ci z Was, którzy znają prawa fizyki, wiedzą, dlaczego tak się dzieje.



źródło: wikimedia commons

źródło: wikipedia

Polecam wszystkim obejrzenie filmiku na stronie <https://www.youtube.com/watch?v=ISfIT3B4y6E> w którym pokazano, jak ten kubek „działa” oraz czy tak samo „zachowują się” w nim wszystkie ciecze. Video jest w języku angielskim, ale myślę, że każdy z Was zrozumie, o co w nim chodzi.

Pitagoras i jego uczniowie dokonali szeregu odkryć, które dały podwaliny współczesnej matematyce, astronomii, muzyce, filozofii i innym dziedzinom. Nie sposób przecenić ich wkładu w rozwój nauki.

W kolejnym miesiącu przypadają „Walentynki”, czyli dzień Zakochanych, dlatego w następnym artykule opowiem o miłości w matematyce..

Bibliografia

- * „Nowe ślady Pitagorasa. Książka o matematyce” - Bogdan Miś, wyd. btc 2011
- * „Matematyka I. Podręcznik dla liceum i technikum. Zakres podstawowy ” - M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech, wyd GWO 2002
- * „Muzyka sfer” - T. Grębski, Wiedza i Życie nr 9/2015
- * Encyklopedia PWN
- * <http://www.math.edu.pl/pitagoras-z-samos>
- * <http://www.swiatmatematyki.pl/index.php?p=48>
- * <http://www.serwis-matematyczny.pl>
- * <http://www.matematyka.wroc.pl/poczet/pitagoras-z-samos>
- * Ilustracja uogólnionego tw. Pitagorasa pochodzi z książki: „Matematyka II. Podręcznik dla liceum i technikum. Zakres podstawowy z rozszerzeniem” - M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech, wyd GWO 2003

Dowód tw. Pitagorasa

Mamy trójkąt prostokątny o przyprostokątnych: krótsza AB i dłuższa AC i przeciwprostokątnej BC. Dorysowujemy kwadraty zbudowane na przyprostokątnych i przeciwprostokątnej. Przez środek kwadratu zbudowanego na przyprostokątnej AC poprowadźmy dwie proste: jedną równoległą, a drugą prostopadłą do przeciwprostokątnej BC. Teraz wytnijmy kwadraty, ten porysowany potnijmy wzdłuż linii i z otrzymanych części oraz mniejszego kwadratu ułóżmy ten największy kwadrat. Przyjemności!