Tajemnicze liczby Fibonacciego cz.1

W tym artykule zajmiemy się niezwykłymi liczbami Fibonacciego.
Najpierw kilka słów o ich odkrywcy.

Leonardo Pisano, czyli Leonardo z Pizy znany również jako **Fibonacci** (od łacińskiego filius Bonacci – syn Bonacciego) urodził się ok. 1175r w Pizie. Jego ojciec Gugliemo (Wilhelm) Bonacci był urzędnikiem państwowym i w roku 1192 otrzymał posadę celnika w Bugii – mieście położonym na śródziemnomorskim wybrzeżu Afryki. Bugia (dziś Bidżaja w Algierii) była zamorską kolonią Pizy. Leonardo dołączył do ojca i miał rozpocząć karierę kupca. W tym celu uczył się rachunków, ponieważ każda z republik operowała własną walutą i kupcy musieli przeliczać swoje środki na odpowiednie jednostki. Należało dokonywać obliczeń codziennie – zgodnie z podawanym kursem danej waluty. Właśnie w Bugii Fibonacci po raz pierwszy zetknął się z cyframi arabskimi (do tej pory znał tylko system rzymski).

Leonardo Pisano , znany jako Fibonacci (wikimedia)

W związku z prowadzeniem interesów Fibonacci wiele podróżował. Dotarł do Egiptu, Syrii, Grecji, był również na Sycylii oraz w Prowansji. Chciał również poznać nowe metody prowadzenia obliczeń, dlatego wszędzie tam, gdzie przebywał spotykał się z matematykami. Na przełomie wieków wrócił do Pizy, gdzie próbował spisać wszystko, czego dowiedział się podczas podróży. W ten sposób powstało dzieło „Liber abacci” (wydane w 1202r.), poświęcone praktycznym zastosowaniom metod rachunkowych z użyciem cyfr arabskich. We wstępie Leonardo pisze:
Dziewięć cyfr indyjskich to: 9,8,7,6,5,4,3,2,1. Za ich pomocą oraz przy użyciu znaku 0, który jest przez Arabów zwany „zefirium”, można zapisać każdą, dowolnie wybraną liczbę, co zostanie pokazane poniżej.
Inne dzieła Fibonacciego, to: „Practica geometriae”(1220) – poświęcone praktycznym zastosowaniom geometrii; „Filos”(1225) – dotyczące kwiatów i kwitnienia; „Liber quadratorum”(1225) – czyli Księga Kwadratów; „Di minor guisa”- poświęcone arytmetyce w handlu; a także komentarze X księgi „Elementów” Euklidesa, w których zawarł algebraiczny opis liczb niewymiernych. Niestety niewiele z tych dzieł zachowało się do dziś.
Fibonacci pomagał (często nieodpłatnie) obywatelom miasta w prowadzeniu rachunków, za co został nagrodzony dożywotnią pensją przez Republikę Pizy. Zmarł w 1250 roku.

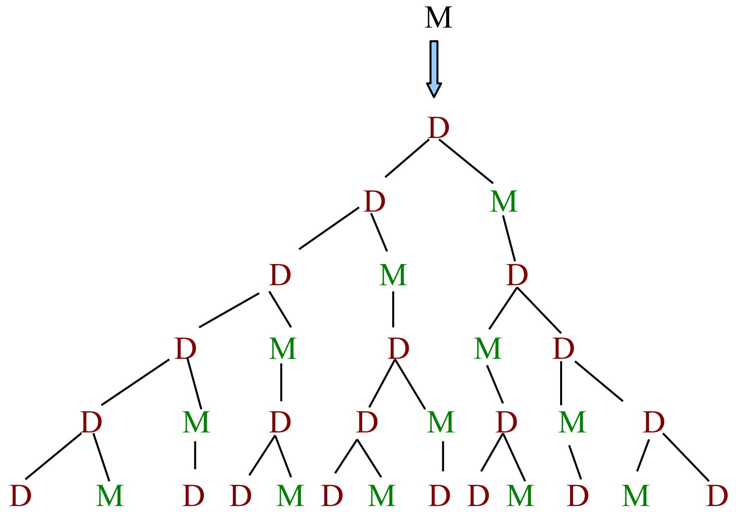
Fibonacci wywarł ogromny wpływ na rozwój matematyki świata zachodniego. Był jednym z najwybitniejszych uczonych swoich czasów. Jednak najbardziej zasłynął opisując problem rozmnażania się królików , który doprowadził go do odkrycia ciągu liczb znanego dziś na całym świecie jako **ciąg Fibonacciego.**

Jakie to liczby?
Zadanie prowadzące do nich brzmiało następująco:

Pewien człowiek trzymał w zamkniętym kojcu parę królików. Chcemy wiedzieć, z ilu par będzie składać się po roku jego hodowla, jeśli wiemy, że w naturze tych zwierząt leży wydawanie na świat nowej pary w ciągu miesiąca, a para ta stanie się płodna po upływie następnego miesiąca.

Rozwiązanie możemy zilustrować drzewem:

M – para młodych osobników; D – para dorosłych



itd...

Na początku mamy jedną parę, po miesiącu nadal jedną, po dwóch miesiącach dwie, po trzech 3, po czterech 5 itd.
Łączna liczba par królików zliczana co miesiąc tworzy ciąg liczb: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, itd.

Jak powstają kolejne liczby, czyli wyrazy tego ciągu?
Spróbuj odpowiedzieć na to pytanie, zanim przeczytasz dalej.

Można zauważyć, że kolejne wyrazy, począwszy od trzeciego powstają przez dodanie dwóch poprzednich i tak:

2 { 1
  1 } 3
5 { 2
  3 } 8
13 { 5
  8 } 21
34 { 13
  21
  34
  …

Ciąg ten jest znany jako ciąg Fibonacciego.
Nazwę nadał mu francuski matematyk Edouard Lukas (który badał ciąg podobny do ciągu Fibonacciego, ale rozpoczynający się nie od dwóch 1, tylko od 1 i 3.)

Możemy go zdefiniować rekurencyjnie (F_n oznacza wyraz n-ty ciagu, np. F_1 – pierwszy wyraz):

$F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}= F_n+F_{n+1},$ gdzie n jest liczbą naturalną większą lub równą 1.

Dlaczego ten ciąg jest niezwykły?

Zwróćmy uwagę na niektóre jego własności:

1. Suma każdych kolejnych dziesięciu wyrazów jest podzielna przez 11.
Niewiarygodne? Sprawdź sam. Na końcu dzisiejszej części artykułu zamieszczam 50 początkowych wyrazów ciągu Fibonacciego. Wybierz dowolną dziesiątkę kolejnych liczb, dodaj je i sprawdź (np. używając kalkulatora), czy suma ta jest podzielna przez 11. (Jest podzielna, prawda?)

2. Zbadaj, czy dowolne dwie sąsiednie liczby mają wspólne dzielniki naturalne (rozłóż na czynniki obie liczby). Okazuje się, że jedynym ich wspólnym dzielnikiem naturalnym jest 1. Zatem:
Sąsiednie liczby tego ciągu są liczbami względnie pierwszymi.

3. Przypomnijmy, że liczba pierwsza to liczba naturalna większa od 1, która dzieli się tylko przez 1 i przez samą siebie (nie ma innych dzielników). W ciągu Fibonacciego:
Jeżeli n nie jest liczbą pierwszą, to F_n też nie jest liczbą pierwszą (przy założeniu, że n jest różne od 4)

4. Suma pierwszych n wyrazów ciągu jest o 1 mniejsza od wyrazu stojącego dwa miejsca za ostatnim składnikiem sumy:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Sprawdźmy tę zależność np. dla sumy pięciu początkowych wyrazów:

$F_1=1,\ F_2=1,\ F_3=2,\ F_4=3,\ F_5=5,\quad F_7=13$

$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = 13 - 1 = F_7 - 1$.

5. Suma kwadratów początkowych liczb Fibonacciego jest równa iloczynowi ostatniego składnika sumy i wyrazu kolejnego:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

6. Złota liczba związana jest z tzw. złotym podziałem. Polega on na takim podzieleniu odcinka na dwie części, aby stosunek dłuższej części do krótszej był taki sam jak stosunek całego odcinka do dłuższej jego części. Złota liczba jest właśnie tym stosunkiem i wynosi

$\varphi =$ 1,61803398874989484820… (φ – phi, wym. fi)

Wyniki dzielenia przez siebie dwóch kolejnych liczb Fibonacciego zbliżają się do złotej liczby

Sprawdź, czy tak jest w istocie. Im dalsze wyrazy weźmiemy, tym ich stosunek jest bliższy złotej liczbie.

To tylko niektóre ciekawe właściwości ciągu liczb Fibonacciego. Oczywiście jest ich dużo więcej. Zachęcam do samodzielnego szukania innych własności.

Liczby Fibonacciego mogą zainteresować nie tylko matematyków.
W następnej części pokażę, że występują one powszechnie w naturze, przyrodzie i społeczeństwie, a w kolejnej opowiem więcej o złotym stosunku oraz liczbach Fibonacciego w architekturze, muzyce, a także w inwestycjach giełdowych.

Bibliografia:
„Niezwykłe liczby Fibonacciego. Piękno natury, potęga matematyki”- Alfred S. Posamentier, Ingmar Lehmann, przeł Julia Szajkowska, wyd Prószyński i S-ka 2014
http://world.mathigon.org/Sequences
https://plus.maths.org/content/life-and-numbers-fibonacci

Początkowe liczby ciągu Fibonacciego:

Nr wyrazu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Wartość wyrazu	**1**	**1**	**2**	**3**	**5**	**8**	**13**	**21**	**34**	**55**	**89**	**144**	**233**	**377**	**610**	**987**	**1597**	**2584**	**4181**	**6765**

Nr wyrazu	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Wartość wyrazu	**10946**	**17711**	**28657**	**46368**	**75025**	**121393**	**196418**	**317811**	**514229**	**832040**	**1346269**	**2178309**

Nr wyrazu	33	34	35	36	37	38	39	40	41
Wartość wyrazu	**3524578**	**5702887**	**9227465**	**14930352**	**24157817**	**39088169**	**63245986**	**102334155**	**165580141**

Nr wyrazu	42	43	44	45	46	47	48
Wartość wyrazu	**267914296**	**433494437**	**701408733**	**1134903170**	**1836311903**	**2971215073**	**4807526976**

Nr wyrazu	49	50	itd
Wartość wyrazu	**7778742049**	**12586269025**	**itd**