Co łączy te krzywe? cz.1

W matematyce rozróżniamy wiele krzywych, jednak najczęściej spotykamy się z okręgiem, parabolą, hiperbolą, elipsą. Jak określamy te krzywe? Gdzie występują? Co je łączy? Postaram się odpowiedzieć na wszystkie te pytania. W tym artykule opowiem o okręgu i elipsie, a w kolejnych - o pozostałych wymienionych krzywych.

1. Okrąg

Każdy zapewne wie, jak wygląda okrąg. Potocznie mówi się, że jest to „kółko puste w środku”. Natomiast koło znane było od najdawniejszych czasów. Wykorzystanie tej figury jako koło jezdne pojawiło się ok. 3500 lat p.n.e. w Mezopotamii. Okrąg to brzeg koła, czyli zbiór punktów płaszczyzny jednakowo oddalonych od jednego punktu zwanego środkiem okręgu. Odcinek łączący dowolny punkt okręgu z jego środkiem nazywamy promieniem okręgu.
Oto kilka przykładów zastosowań okręgów:




źródło : opracowanie własne


źródło : pixabay.com

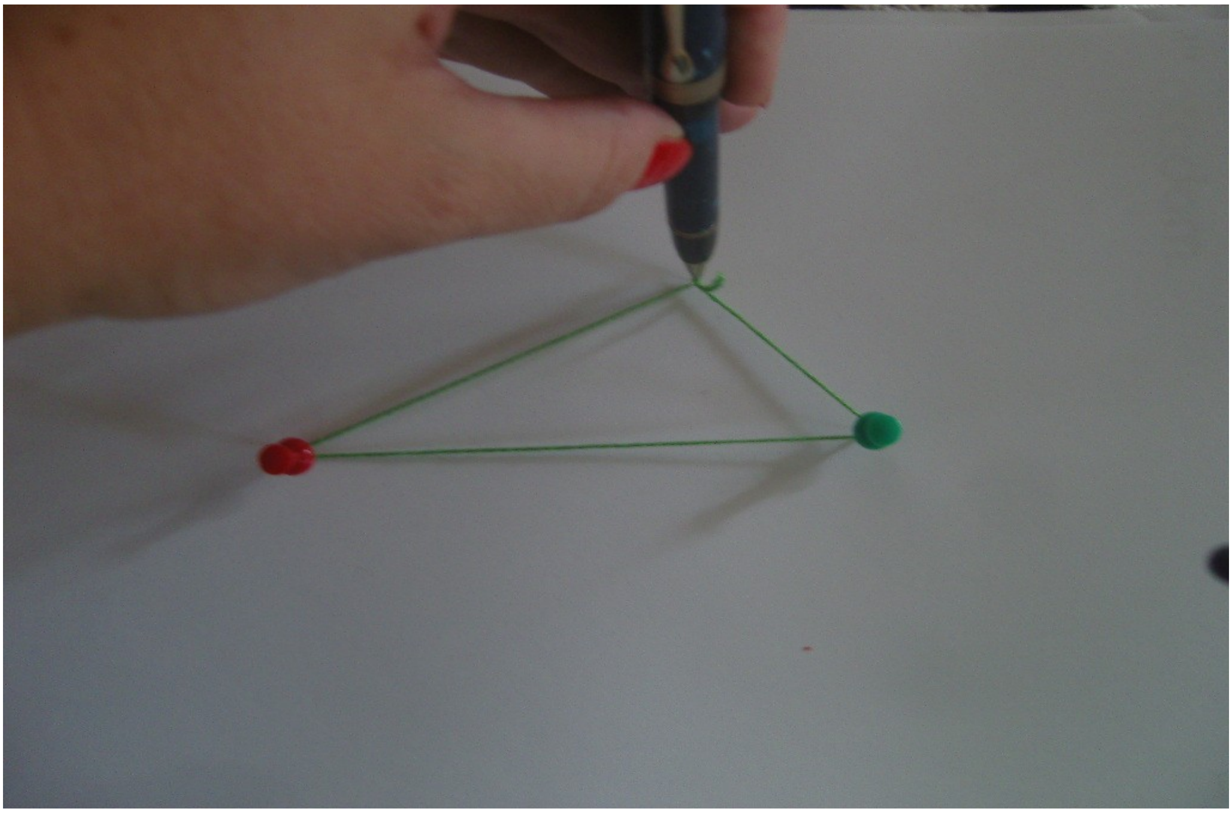
2. Elipsa.

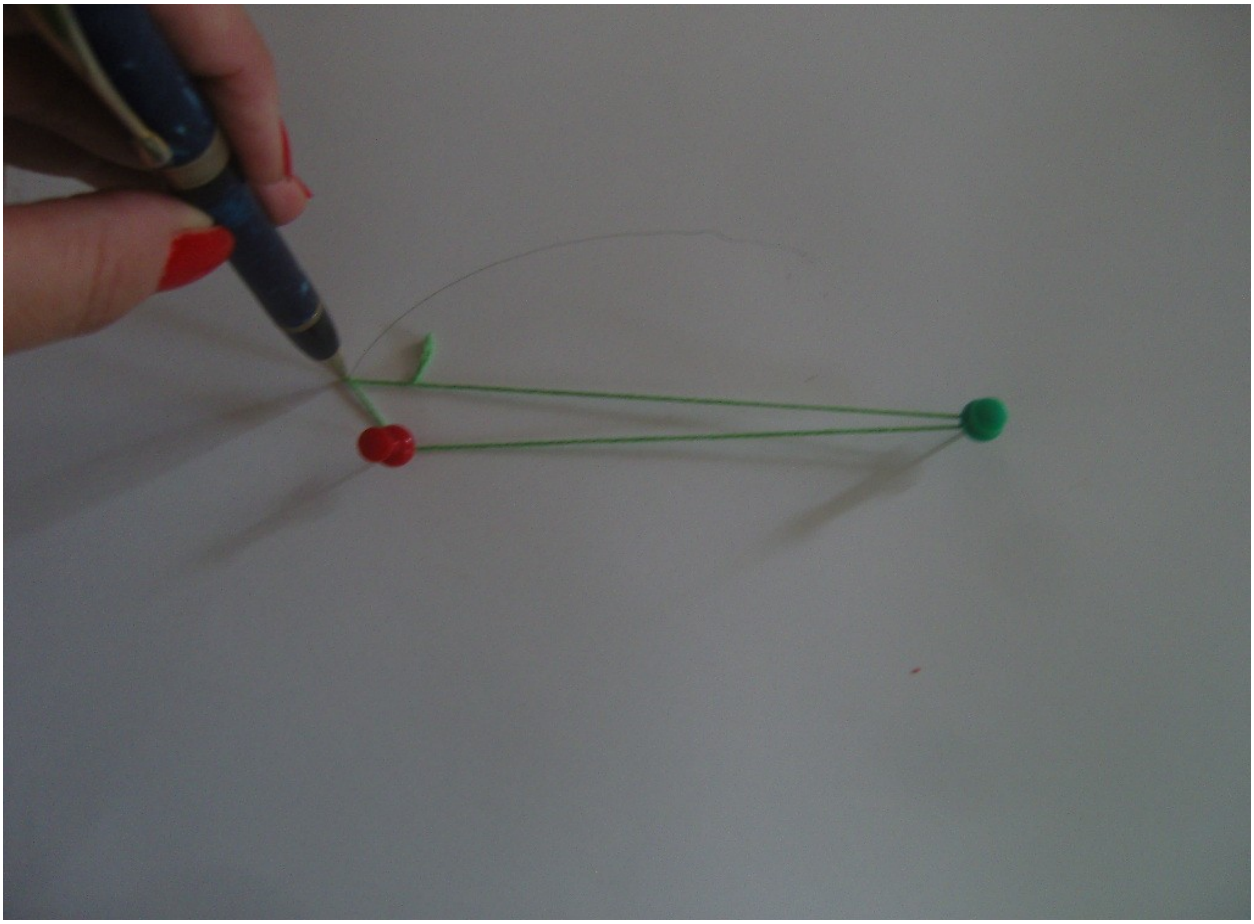
Potocznie elipsę nazywamy „spłaszczonym okręgiem”. Choć tak naprawdę, to okrąg jest szczególnym przypadkiem elipsy, a nie na odwrót.

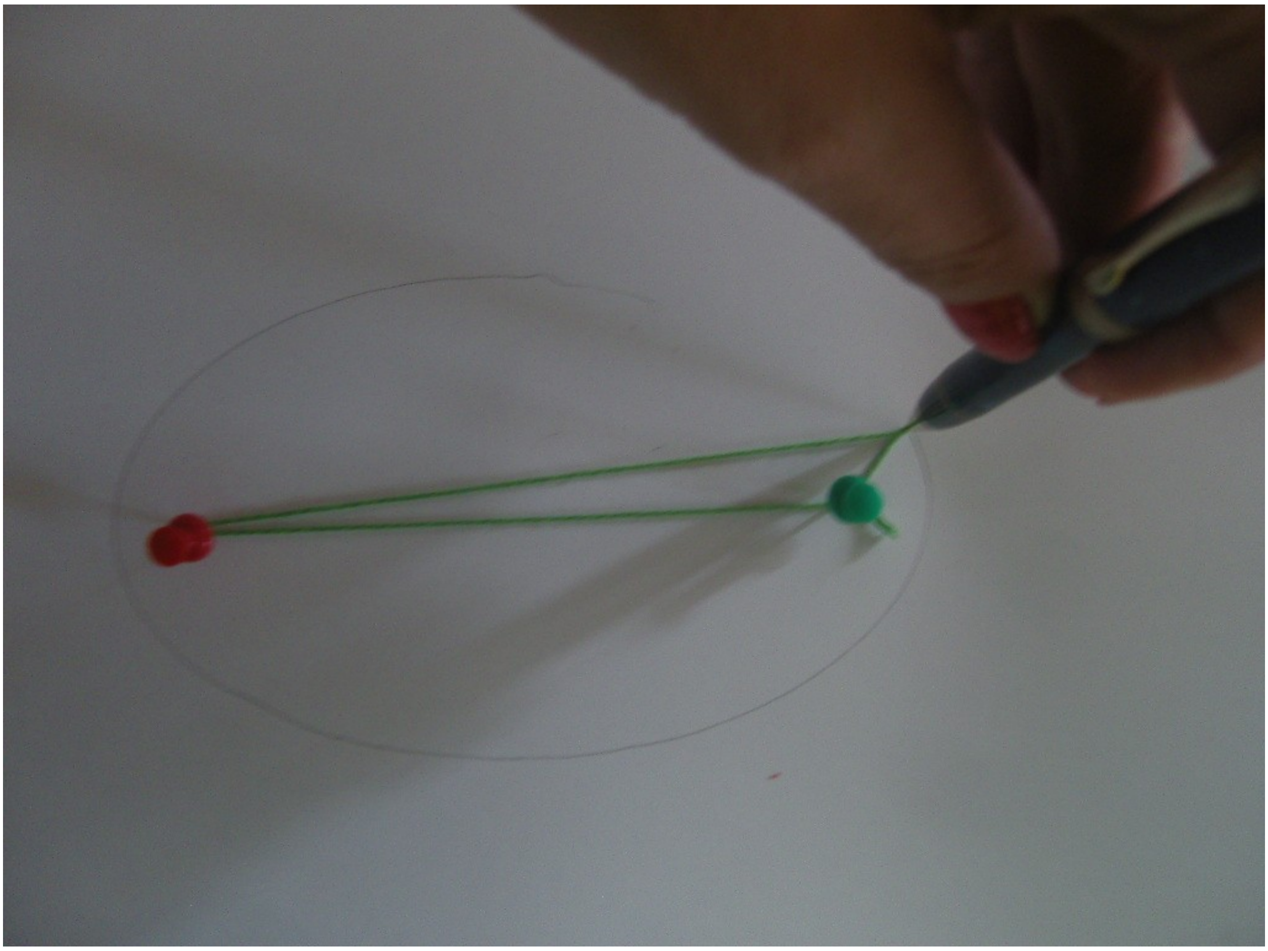
Gdzie znajdziemy figury, które mają kształt elipsy lub których brzeg jest elipsą?
Wystarczy, że spojrzymy na powierzchnię wody w przechylonej szklance czy na powierzchnię przeciętego pod pewnym kątem ogórka. Eliptyczny kształt ma też cień rzucany przez oświetloną z boku piłkę.

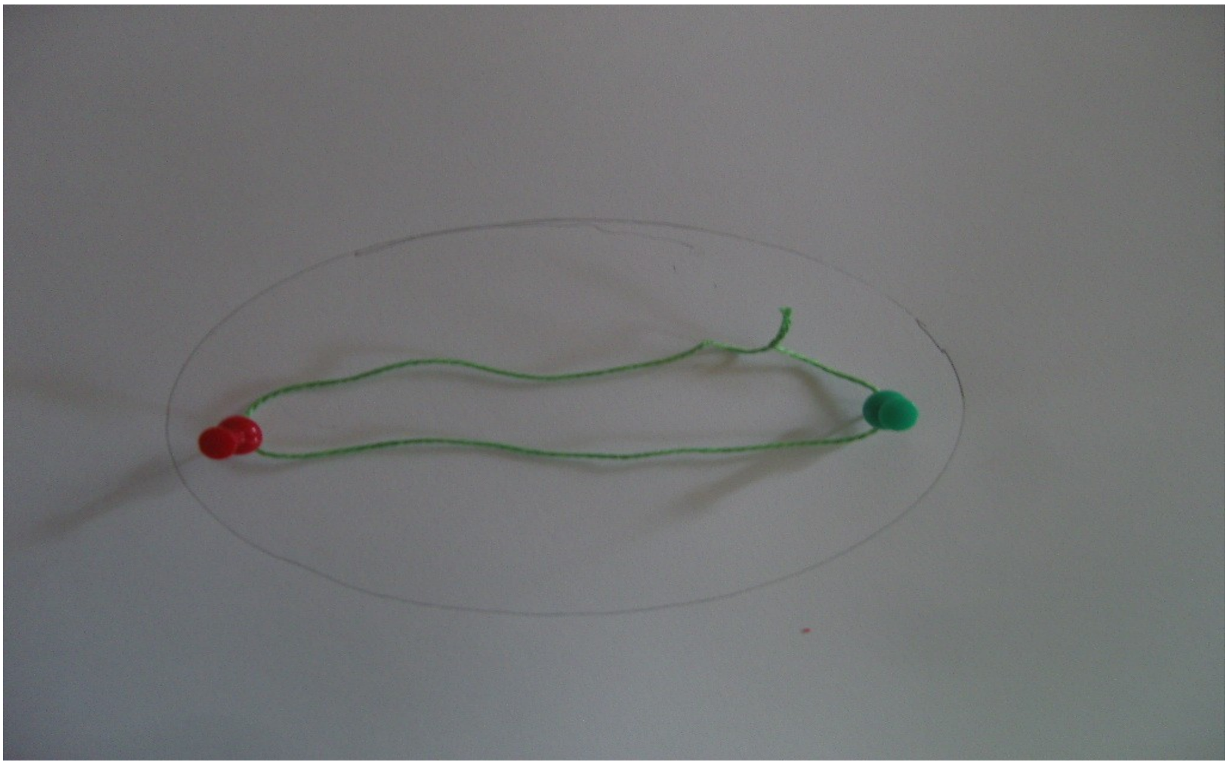
źródło: opracowanie własne

Czy trudno jest narysować elipsę? Przekonajcie się, że to łatwe zadanie.
Wystarczy wziąć papier (i jakąś podkładkę) lub karton, wbić w niego dwie pinezki (w pewnej odległości od siebie). Następnie trzeba wziąć kawałek nitki lub sznurka, związać końce i taką pętelkę zaczepić o pinezki (nitka powinna być luźna). Teraz wkładamy ołówek do środka pętli i przesuwamy tak, aby nitka była stale napięta. Na papierze powstanie elipsa:



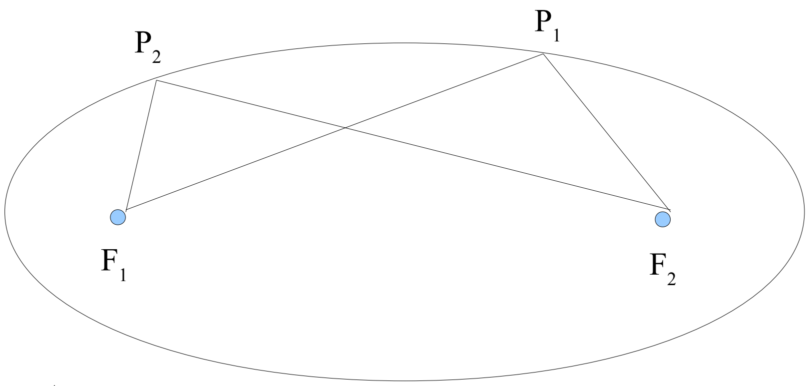






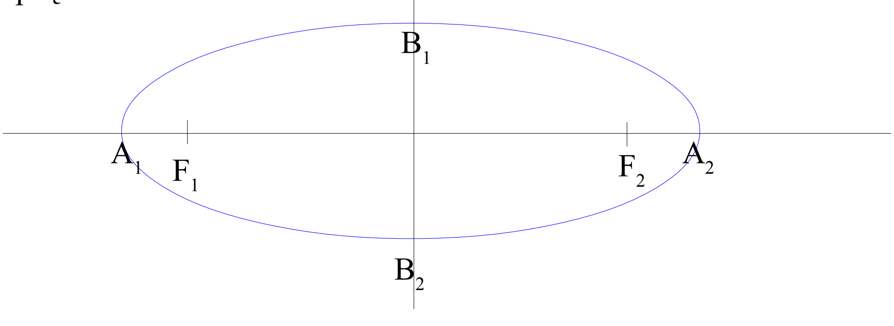
źródło : opracowanie własne

Znając sposób rysowania elipsy można łatwo wywnioskować, jaka jest definicja tej krzywej:
Elipsa jest zbiorem punktów płaszczyzny takich, że suma ich odległości od dwóch ustalonych punktów F_1 i F_2 zwanych ogniskami jest stała.



$$|F_1P| + |F_2P| = const$$

Osią wielką elipsy nazywamy odcinek A_1A_2 , gdzie A_1 i A_2 są punktami przecięcia elipsy z prostą wyznaczoną przez ogniska.
Osią małą elipsy nazywamy odcinek B_1B_2 , przy czym B_1 i B_2 są punktami przecięcia symetralnej osi wielkiej z elipsą.

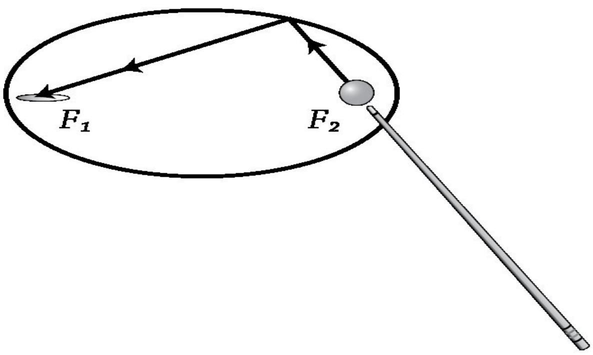


Wiemy już, że suma odległości dowolnego punktu elipsy od jej ognisk jest stała. Okazuje się jeszcze, że suma ta jest równa długości osi wielkiej elipsy.

Równanie kanoniczne elipsy o osi wielkiej długości 2a i osi małej długości 2b ma postać:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Elipsa ma właściwości skupiające w ognisku. Co to znaczy? Otóż fala, która wyjdzie z jednego ogniska zostanie skupiona w drugim. Jeżeli mamy napełnione wodą pudełko o eliptycznym brzegu i zanurzymy energicznie palec w punkcie odpowiadającym jednemu z ognisk, to po chwili w drugim ognisku zaobserwujemy nagłe spiętrzenie wody.
Przytoczę teraz fragment książki „ Szczęśliwy X. Matematyka na co dzień”, w którym autor Steven Strogatz w ciekawy sposób wyjaśnia zjawisko skupiania w ognisku elipsy:
„Przypuśćmy, że Daniel i Łukasz bawią się w laserowego berka w eliptycznym pomieszczeniu z lustrzanymi ścianami. Umówili się, że nie wolno celować laserem bezpośrednio w przeciwnika – trafić go można tylko światłem odbitym. Daniel, niezbyt biegły w geometrii czy optyce, proponuje, żeby każdy z graczy stanął w ognisku. „Doskonale – odpowiada Łukasz – pod warunkiem, że ja będę strzelał pierwszy”. Cóż, gra będzie dość krótka, gdyż Łukasz nie może spudłować! Jakkolwiek ustawi swój laser, zawsze trafi w Daniela. Każdy strzał daje zwycięstwo.
Jeśli waszą ulubioną grą jest bilard, wyobraźcie sobie eliptyczny stół z łuzą w jednym z ognisk. Ustawiając bilę w d r u g i m ognisku, zapewniacie sobie mistrzowskie uderzenie z gwarancją trafienia. Wszystko jedno, jak uderzycie bilę, wszystko jedno, gdzie odbije się ona od bandy – zawsze trafi do łuzy.”



Właściwości skupiające elipsy wykorzystano też w medycynie do rozbijania kamieni nerkowych falą pozaustrojową. W dużym uproszczeniu wygląda to tak, że umieszcza się pacjenta w eliptycznej wannie w taki sposób, aby kamień znalazł się w jednym z ognisk. Następnie z drugiego ogniska generuje się falę, która skupia swą energię na kamieniu rozbijając go.

Elipsy znajdziemy też we Wszechświecie. W 1609 roku Jan Kepler odkrył, że orbita każdej z planet Układu Słonecznego ma kształt elipsy, a Słońce znajduje się w jej ognisku. Poza tym powierzchnie planet (i księżyców) nie są idealnie kuliste lecz tworzą powierzchnię zwaną elipsoidą obrotową. Powierzchnia ta powstaje z obrotu elipsy wokół jej osi (wygląda więc jak piłka do rugby lub dysk).

Sklepienia zaprojektowane w kształcie elipsoidy obrotowej mają szczególne właściwości akustyczne. Dwaj rozmówcy stojący twarzą do ściany w przeciwległych „rogach” takiej przestrzeni, będą się doskonale słyszeć wzajemnie mimo gwaru panującego dokoła. Rozmówcy mogą mówić całkiem cicho, nawet szeptać i znajdować się w odległości nawet 30m od siebie. Przykładami takich przestrzeni są Galeria Szeptów w Katedrze św. Pawła w Londynie, galeria przy restauracji Oyster Bar na Grand Central Station w Nowym Jorku i wiele innych.

3. Okrąg i elipsa – trochę zadań

- Czy można w jakiś „matematyczny" sposób otrzymać elipsę z okręgu? Okazuje się, że tak. Pomoże nam w tym następujące przekształcenie geometryczne:

Punktowi P(x, y) przyporządkowany jest punkt P' (x, ky), gdzie k jest pewną liczbą dodatnią.
(np. dla k = 3 punktowi P(1,2) przyporządkowany zostanie punkt P' (1, 6))
Obrazem okręgu w tym przekształceniu jest elipsa.

Można zobaczyć to na przykładzie:
Narysujcie okrąg o środku (0,0) i promieniu długości 3. Zaznaczcie na nim kilka punktów, a następnie znajdźcie obrazy tych punktów w opisanym przekształceniu dla $k=\frac{1}{3}$ oraz dla $k = 2$. Połączcie powstałe punkty i naszkicujcie elipsy. Jakie długości mają osie tych elips?

- Spośród wszystkich punktów na elipsie najbliżej ogniska leży jeden z końców osi wielkiej elipsy, a drugi koniec tej osi to punkt najbardziej oddalony od tego ogniska. Najmniejsza odległość Ziemi od Słońca to 147 mln km., a największa – 152 mln km. Jaką długość ma oś wielka orbity Ziemi?
- Na zakończenie spróbujcie uzasadnić, że ogniskami elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ są punkty $F_1(c,0)$ oraz $F_2(-c, 0)$, gdzie $c^2 = a^2 - b^2$.

Jak widać matematyka to nie tylko liczby i działania na nich, ale i inne obiekty, jak np. krzywe a wśród nich okrąg i elipsa. Zwłaszcza właściwości tej drugiej można wykorzystać w ciekawy sposób.

Źródła:

- „Szczęśliwy X. Matematyka na co dzień" - Steven Strogatz, wyd PWN Sp. z o.o. 2014r
- „Matematyka przy kominku" - Michał Szurek wyd BTC 2008r
- „Krzywe stożkowe w codziennym życiu" - Tomasz Grębski ,czasopismo „Matematyka" nr5, 2015r
- „Matematyka II. Podręcznik dla liceum i technikum zakres podstawowy z rozszerzeniem" - M. Dobrowolska, M. Karpiński, J. Lech, wyd GWO, 2003r
- encyklopedia PWN

Odpowiedzi do zadań:

1. dla $k=\frac{1}{3}$ osie mają długości: 6 i 2; natomiast dla k=2 mają długości 6 i 12.
2. Oś orbity Ziemi ma długość 147mln km + 152mln km = 299 mln km.
3. Wskazówka: Punkt A(a, 0) i B(0, b) należy do elipsy, więc $|AF_1|+|AF_2|=|BF_1|+|BF_2|$